PRUEBA DE ACCESO (LOGSE)

UNIVERSIDAD DE BALEARES

SEPTIEMBRE - 2003

RESUELTOS

MATEMÁTICAS II | Tiempo máximo: 1 horas y 30 minutos

Contesta de manera clara y razonada una de las dos opciones propuestas. Cada cuestión se puntúa sobre 10 puntos. La calificación final se obtiene de dividir el total entre 4.

OPCIÓN A

1º) Encontrar el punto de inflexión de la curva de ecuación $y=\frac{x}{x^2-1}$. Calcular la ecuación de la recta tangente a la curva en ese punto.

Un punto de inflexión de una curva se encuentra en los puntos de abscisa que anulan la segunda derivada y que hacen distinta de cero a la tercera derivada.

$$y'=\frac{1\cdot(x^2-1)-x\cdot 2x}{(x^2-1)^2}=\frac{x^2-1-2x^2}{(x^2-1)^2}=\underline{-\frac{1+x^2}{(x^2-1)^2}=y'}$$

$$y''=-\frac{2x\cdot(x^2-1)^2-(1+x^2)\cdot 2\cdot(x^2-1)\cdot 2x}{(x^2-1)^4}=-\frac{2x\cdot(x^2-1)-4x\cdot(1+x^2)}{(x^2-1)^3}=$$

$$=\frac{4x+4x^3-2x^3+2x}{(x^2-1)^3}=\frac{2x^3+6x}{(x^2-1)^3}=\underline{\frac{2x(x^2+3)}{(x^2-1)^3}=y''}$$

$$y'''=\frac{(6x^2+6)\cdot(x^2-1)^3-2x(x^2+3)\cdot 3\cdot(x^2-1)^2\cdot 2x}{(x^2-1)^6}=\frac{(6x^2+6)\cdot(x^2-1)-12x^2(x^2+3)}{(x^2-1)^4}=$$

$$=\frac{6(x^2+1)\cdot(x^2-1)-12x^4-36x^2}{(x^2-1)^4}=\frac{6(x^4-1)-12x^4-36x^2}{(x^2-1)^4}=\underline{-\frac{6x^4+36x^2+6}{(x^2-1)^4}=y'''}$$

$$y''=0\Rightarrow\frac{2x(x^2+3)}{(x^2-1)^3}=0\ \ ;;\ \ 2x(x^2+3)=0\ \ ;;\ \ \underline{x=0}$$

$$y'''(0) = -\frac{0+0+6}{(0-1)^4} = \frac{-6}{1} = -6 \neq 0 \;\Rightarrow\; \underline{Punto\;\;de\;\;\inf lexión\;\;para\;\;x=0}$$

$$y(0) = \frac{0}{0^2-1} = 0 \;\Rightarrow\; \underline{\underline{P.\;I.\;\Rightarrow\;O(0,\;0)}}$$

La tangente a una curva en un punto es la recta cuya pendiente es igual a la derivada de la función en ese punto.

$$y' = -\frac{1+x^2}{(x^2-1)^2} \;\Rightarrow\; y'(0) = -\frac{1+0^2}{(0^2-1)^2} = -\frac{1}{1} = \underline{-1 = m}$$

Por ser el punto de inflexión el origen de coordenadas la tangente es la recta afín que pasa por el origen con pendiente -1, o sea:

$$Tangente:\;\; y = -x \;\;;;\;\; \underline{\underline{t \neq x + y = 0}}$$

****

2º) Calcular el rango de la matriz $A=\begin{pmatrix} 1 & k & -1 & 1 \\ 2 & 1 & -k & 2 \\ 1 & -1 & -1 & k-1 \end{pmatrix}$ según los valores del parámetro k.

El rango máximo que puede tener A es 3, por tener 3 filas.

El rango de A es, por lo menos 2, por ser $\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix}=-2-1=-3\neq 0$. Veamos si tiene rango 3 para algún valor de k:

$$\{C_1,\ C_2,\ C_3\} \Rightarrow \begin{vmatrix} 1 & k & -1 \\ 2 & 1 & -k \\ 1 & -1 & -1 \end{vmatrix}=-1+2-k^2+1-k+2k=-k^2+k+2=0\ ;;\ k^2-k-2=0$$

$$k=\frac{1\pm\sqrt{1+8}}{2}=\frac{1\pm\sqrt{9}}{2}=\frac{1\pm 3}{2}\Rightarrow \underline{k_1=2}\ ;;\ \underline{k_2=-1}$$

$$\{C_1,\ C_2,\ C_4\} \Rightarrow \begin{vmatrix} 1 & k & 1 \\ 2 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & k-1 \end{vmatrix}=k-1-2+2k-1+2-2k(k-1)=3k-2-2k^2+2k=$$

$$=-2k^2+5k-2=0\ ;;\ 2k^2-5k+2=0$$

$$k=\frac{5\pm\sqrt{25-16}}{4}=\frac{5\pm\sqrt{9}}{4}=\frac{5\pm 3}{4}\Rightarrow \underline{k_1=2}\ ;;\ \underline{k_3=\frac{1}{2}}$$

$$\{C_2,\ C_3,\ C_4\} \Rightarrow \begin{vmatrix} k & -1 & 1 \\ 1 & -k & 2 \\ -1 & -1 & k-1 \end{vmatrix}=-k^2(k-1)-1+2-k+2k+k-1=-k^3+k^2+2k=0\ ;;$$

$$-k(k^2-k-2)=0\ ;;\ \underline{k_4=0}\ ;;\ k^2-k-2=0\ ;;\ \underline{k_1=2}\ ;;\ \underline{k_2=-1}$$

$$\underline{\underline{Para\ \ k=2\Rightarrow Rango\ \ A=2}}\ ;;\ \underline{\underline{Para\ \ k\neq 2\Rightarrow Rango\ \ A=3}}$$

****

3º) Enunciar el Teorema de Bolzano. Aplicarlo para demostrar que la ecuación x = cos x tiene al menos una solución en el intervalo $\left[0,\ \frac{\pi}{2}\right]$.

El teorema de Bolzano se puede enunciar de la siguiente forma:

"Si una función f es continua en un intervalo cerrado [a, b] y en los extremos de éste toma valores de distinto signo, entonces existe al menos un valor $c \in (a,\ b)$ tal que $f(c) = 0$".

La ecuación x = cos x se puede considerar como una función f(x) = x – cos x.

La función f(x) es continua en su dominio, que es R, por tanto lo será en cualquier intervalo finito que se considere.

Se trata de encontrar dos valores finitos de x, a y b, tales que: f(a) < 0 y f(b) > 0:

Por ejemplo:

$$f(0) = 0 - \cos\ 0 = -1 < 0\ \ ;;\ \ f\left(\tfrac{\pi}{2}\right) = \frac{\pi}{2} - \cos\frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{2} - 0 = \frac{\pi}{2} > 0$$

Según el teorema de Bolzano, se puede afirmar que la función f(x) = x – cos x tiene al menos un punto de corte con el eje OX en el intervalo $\left(0,\ \frac{\pi}{2}\right)$ y, como consecuencia, la ecuación x = cos x tiene al menos una solución positiva en el intervalo $\left(0,\ \frac{\pi}{2}\right)$.

****

4º) Calcular el área del triángulo que tiene por vértices los puntos de intersección del plano $\pi \equiv x + y + 2z - 2 = 0$ con los ejes de coordenadas.

Los puntos de corte del plano π con los ejes coordenados son:

$$X \Rightarrow \left\{ \begin{matrix} y = 0 \\ z = 0 \end{matrix} \right\} \to A(2,\ 0,\ 0) \ ;;\ Y \Rightarrow \left\{ \begin{matrix} x = 0 \\ z = 0 \end{matrix} \right\} \to B(0,\ 2,\ 0) \ ;;\ Z \Rightarrow \left\{ \begin{matrix} x = 0 \\ y = 0 \end{matrix} \right\} \to C(0,\ 0,\ 1)$$

Los vectores que determinan el triángulo son:

$$\overrightarrow{u} = \overrightarrow{AB} = B - A = (0,\ 2,\ 0) - (2,\ 0,\ 0) = (-2,\ 2,\ 0)$$

$$\overrightarrow{v} = \overrightarrow{AC} = C - A = (0,\ 0,\ 1) - (2,\ 0,\ 0) = (-2,\ 0,\ 1)$$

El área de un triángulo es la mitad del área del paralelogramo que determinan dos vectores y el área del paralelogramo, a su vez, es el módulo del producto vectorial de los dos vectores, por lo cual:

$$S_{ABC} = \frac{1}{2} \cdot \left| \overrightarrow{u} \wedge \overrightarrow{v} \right| = \frac{1}{2} \cdot \left\| \begin{matrix} i & j & k \\ -2 & 2 & 0 \\ -2 & 0 & 1 \end{matrix} \right\| = \frac{1}{2} \cdot \left| 2i + 4k + 2j \right| = \frac{1}{2} \cdot \left| 2i + 2j + 4k \right| = \left| i + j + 2k \right| =$$

$$= \sqrt{1^2 + 1^2 + 2^2} = \frac{1}{2} \cdot \sqrt{6} = \underline{\underline{\frac{\sqrt{6}}{2}\ u^2 = S_{ABC}}}$$

****

OPCIÓN B

1º) Calcular: $a\ )\ \lim_{x\to 1}\left(\frac{x}{x-1}-\frac{1}{L\,x}\right)$ $\qquad b\ )\ \int_0^1 \frac{e^x}{1+e^x}\cdot dx$

$$a\ )\ \lim_{x\to 1}\left(\frac{x}{x-1}-\frac{1}{L\,x}\right)=\frac{1}{1-1}-\frac{1}{L1}=\frac{1}{0}-\frac{1}{0}=\infty-\infty \Rightarrow In\det. \Rightarrow \lim_{x\to 1}\frac{x\,L\,x-(x-1)}{(x-1)Lx}=$$

$$=\lim_{x\to 1}\frac{x\,L\,x-x+1}{(x-1)Lx}=\frac{1L1-1+1}{(1-1)L1}=\frac{0+0}{0\cdot 0}=\frac{0}{0}\Rightarrow In\det. \Rightarrow \{L'\,Hopital\}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow \lim_{x\to 1}\frac{1\cdot L\,x+x\cdot\frac{1}{x}-1+0}{-1\cdot L\,x+(x-1)\cdot\frac{1}{x}}=\lim_{x\to 1}\frac{L\,x+1-1}{-L\,x+1-\frac{1}{x}}=\lim_{x\to 1}\frac{L\,x}{1-L\,x-\frac{1}{x}}=\frac{L1}{1-L1-\frac{1}{1}}=$$

$$=\frac{0}{1-0-1}=\frac{0}{0}\Rightarrow In\det. \Rightarrow \{L'\,Hopital\}\Rightarrow \lim_{x\to 1}\frac{\frac{1}{x}}{0-\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}}=\lim_{x\to 1}\frac{x}{0-x+1}=\frac{1}{0}=\underline{\underline{\infty}}$$

$$b\ )\ I=\int_0^1\frac{e^x}{1+e^x}\cdot dx \Rightarrow \left\{\begin{array}{l}1+e^x=t\\ e^x\,dx=dt\end{array}\middle\|\begin{array}{c}x=1\to t=1+e\\ x=0\to t=1\end{array}\right\}\Rightarrow I=\int_1^{1+e}\frac{1}{t}\cdot dt=[L\,t]_1^{1+e}=$$

$$=L(1+e)-L1=L(1+e)-0=\underline{\underline{L(1+e)}}$$

****

2º) Resolver el sistema $\begin{cases} x-y-2z=-1 \\ ax+2y-z=2 \\ x+ay+2z=3 \end{cases}$ cuando sea compatible indeterminado.

Las matrices de coeficientes y ampliada son las siguientes:

$$M=\begin{pmatrix} 1 & -1 & -2 \\ a & 2 & -1 \\ 1 & a & 2 \end{pmatrix} \;;;\; M'=\begin{pmatrix} 1 & -1 & -2 & -1 \\ a & 2 & -1 & 2 \\ 1 & a & 2 & 3 \end{pmatrix}$$

$$|M|=\begin{vmatrix} 1 & -1 & -2 \\ a & 2 & -1 \\ 1 & a & 2 \end{vmatrix}=4-2a^2+1+4+a+2a=-2a^2+3a+9=0 \;;;\; 2a^2-3a-9=0$$

$$a=\frac{3\pm\sqrt{9+72}}{4}=\frac{3\pm\sqrt{81}}{4}=\frac{3\pm 9}{4} \Rightarrow \underline{a_1=3} \;;;\; \underline{a_2=-\frac{3}{2}}$$

$$\underline{\underline{Para\ \left\{\begin{array}{l} a_1\neq 3 \\ a_2\neq -\frac{3}{2} \end{array}\right\} \Rightarrow Rango\ M = Rango\ M'=3=n^{\circ}\ incóg. \Rightarrow Compatible\ Determinado}}$$

Veamos ahora el rango de M' para los valores hallados:

$$Para\ \ a=3 \Rightarrow M'=\begin{pmatrix} 1 & -1 & -2 & -1 \\ 3 & 2 & -1 & 2 \\ 1 & 3 & 2 & 3 \end{pmatrix} \Rightarrow \{C_1=C_2-C_3\} \Rightarrow \underline{Rango\ \ de\ \ M'=2}$$

$$\underline{\underline{Para\ \ a=3 \Rightarrow Rango\ M = Rango\ M'=2<n^{\circ}\ incóg. \Rightarrow Compatible\ Indeterminado}}$$

$$Para\ \ a=-\frac{3}{2} \Rightarrow M'=\begin{pmatrix} 1 & -1 & -2 & -1 \\ \frac{3}{2} & 2 & -1 & 2 \\ 1 & \frac{3}{2} & 2 & 3 \end{pmatrix} \Rightarrow Rango\ \ de\ \ M' \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \{C_1,\ C_2,\ C_4\} \Rightarrow \begin{vmatrix} 1 & -1 & -1 \\ \frac{3}{2} & 2 & 2 \\ 1 & \frac{3}{2} & 3 \end{vmatrix}=6-\frac{9}{4}-2+2+3+\frac{9}{2}=9-\frac{9}{4}+\frac{9}{2}=\frac{36-9+18}{4}=$$

$$=\frac{9}{4}\neq 0 \Rightarrow \underline{Rango\ \ de\ \ M'=3}$$

$$\underline{\underline{Para\ \ a=\frac{3}{2}\Rightarrow Rango\ \ M\neq Rango\ \ M'\Rightarrow Incompatible}}$$

Resolvemos cuando a = 3 (Compatible Indeterminado).

Para a = 3 resulta el sistema $\begin{cases} x-y-2z=-1 \\ 3x+2y-z=2 \\ x+3y+2z=3 \end{cases}$. Despreciando una de las ecuaciones y parametrizando una de las incógnitas, resulta:

$$\begin{cases} x-y-2z=-1 \\ 3x+2\acute{y}-z=2 \end{cases} \Rightarrow \underline{z=\lambda} \Rightarrow \left.\begin{array}{r} x-y=-1+2\lambda \\ 3x+2\acute{y}=2+\lambda \end{array}\right\} \left.\begin{array}{r} 2x-2y=-2+4\lambda \\ 3x+2\acute{y}=2+\lambda \end{array}\right\} \Rightarrow 5x=5\lambda\ \ ;;$$

$$\underline{x=\lambda}\ \ ;;\ \ x-y=-1+2\lambda\ \ ;;\ \ y=x+1-2\lambda=\lambda+1-2\lambda=\underline{1-\lambda=y}$$

$$\underline{\underline{Soluci\acute{o}n:\ \begin{cases} x=\lambda \\ y=1-\lambda, \quad \forall\lambda\in R \\ z=\lambda \end{cases}}}$$

****

3º) Hallar las asíntotas y los extremos relativos de la función $f(x)=\frac{x}{x^2+x+1}$. Hacer una gráfica aproximada de la función.

Las asíntotas de la función son las siguientes:

Horizontales: son los valores finitos de f(x) cuando x tiende a infinito:

$$y=k=\lim_{x\to\infty} f(x)=\lim_{x\to\infty}\frac{x}{x^2+x+1}=\underline{\underline{0=y}}\quad (Eje\ \ X)$$

Verticales: son los valores de x que anulan el denominador.

$$x^2+x+1=0\ \ ;;\ \ x\notin R\ \Rightarrow\ \underline{\underline{\text{No tiene asíntotas verticales}}}$$

Oblicuas: No tiene.

(Para que una función racional tenga asíntotas oblicuas es necesario que el grado del numerador sea una unidad mayor que el grado del denominador).

Para estudiar los extremos relativos, derivamos:

$$f'(x)=\frac{1\cdot\left(x^2+x+1\right)-x(2x+1)}{\left(x^2+x+1\right)^2}=\frac{x^2+x+1-2x^2-x}{\left(x^2+x+1\right)^2}=\underline{\frac{1-x^2}{\left(x^2+x+1\right)^2}=f'(x)}$$

$$f'(x)=0\Rightarrow\frac{1-x^2}{\left(x^2+x+1\right)^2}=0\ \ ;;\ \ 1-x^2=0\ \ ;;\ \ \underline{x_1=1}\ \ ;;\ \ \underline{x_2=-1}$$

$$f''(x)=\frac{-2x\cdot\left(x^2+x+1\right)^2-\left(1-x^2\right)\cdot 2\cdot\left(x^2+x+1\right)\cdot(2x+1)}{\left(x^2+x+1\right)^4}=$$

$$=\frac{-2x\cdot\left(x^2+x+1\right)-2\left(1-x^2\right)(2x+1)}{\left(x^2+x+1\right)^3}=\frac{-2x^3-2x^2-2x-2\left(2x+1-2x^3-x^2\right)}{\left(x^2+x+1\right)^3}=$$

$$=\frac{-2x^3-2x^2-2x-4x-2+4x^3+2x^2}{\left(x^2+x+1\right)^3}=\frac{2x^3-6x}{\left(x^2+x+1\right)^3}=\underline{\frac{2x\left(x^2-3\right)}{\left(x^2+x+1\right)^3}=f''(x)}$$

$$f''(1)=\frac{2(1-3)}{\left(1^2+1+1\right)^3}=\frac{-4}{27}>0\ \Rightarrow\ \underline{Máximo\ \ absoluto\ \ para\ \ x=1}$$

$$f(1)=\frac{1}{1^2+1+1}=\frac{1}{3}\ \Rightarrow\ \underline{\underline{Máximo:\ \ A\left(1,\ \frac{1}{3}\right)}}$$

$$f''(-1)=\frac{-2(1-3)}{(1-1+1)^3}=\frac{4}{8}=\frac{1}{2}>0 \Rightarrow \underline{Mínimo\ \ absoluto\ \ para\ \ x=-1}$$

$$f(-1)=\frac{-1}{1-1+1}=-\frac{1}{1}=-1 \Rightarrow \underline{\underline{Mínimo:\ B(-1,\ -1)}}$$

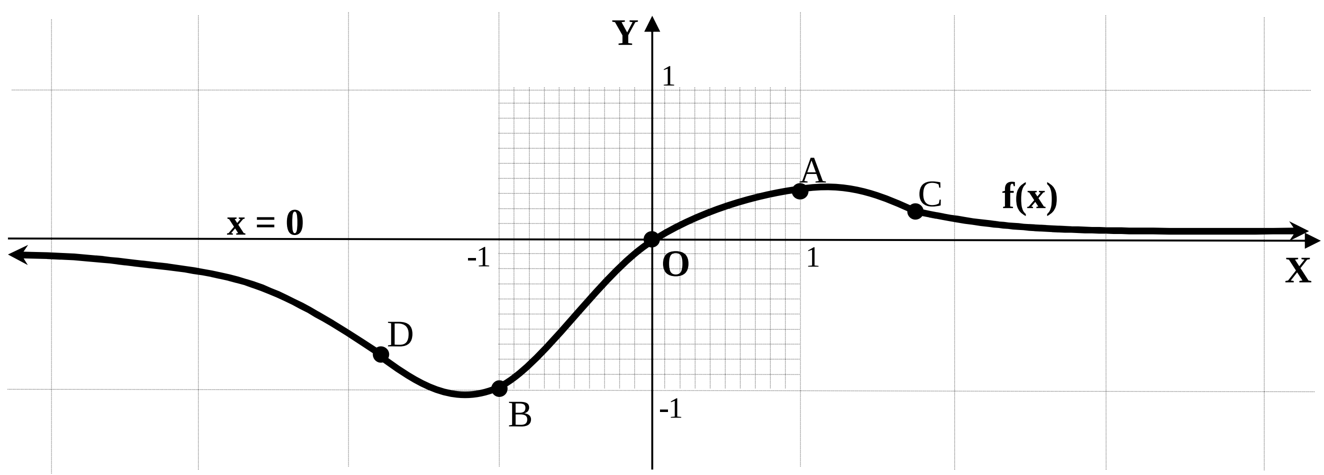
Siendo $f''(x)=\frac{2x(x^2-3)}{(x^2+x+1)^3}$, la función tiene puntos de inflexión para los valores que anulan la segunda derivada, o sea, $x_1=0,\ x_2=\sqrt{3}\ \ y\ \ x_3=-\sqrt{3}$..

$$f(0)=0 \Rightarrow \underline{\underline{P.\ I.:\ O(0,\ 0)}}\ ;;\ f(\sqrt{3})=\frac{\sqrt{3}}{3+\sqrt{3}+1}=\frac{\sqrt{3}}{4+\sqrt{3}}=\frac{\sqrt{3}(4-\sqrt{3})}{13}=\frac{4\sqrt{3}-3}{13} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \underline{\underline{P.\ I.:\ C\left(\sqrt{3},\ \frac{4\sqrt{3}-3}{13}\right)}} \cong (1'73,\ 0'30)\ ;;\ f(-\sqrt{3})=\frac{-\sqrt{3}}{3-\sqrt{3}+1}=\frac{-\sqrt{3}}{4-\sqrt{3}}=\frac{-\sqrt{3}(4+\sqrt{3})}{13}=$$

$$=\frac{-3-4\sqrt{3}}{13} \Rightarrow \underline{\underline{P.\ I.:\ D\left(-\sqrt{3},\ \frac{-3-4\sqrt{3}}{13}\right)}} \cong (-1'73,\ -0'76)$$

La representación aproximada de la función es la siguiente:



****

4º) Sea el plano π que contiene a la recta $r \equiv \frac{x-2}{-3} = \frac{y}{2} = \frac{z+1}{4}$ y al punto P(3, 1, 2). Estudiar la posición relativa del plano π y la recta $s \equiv (x,\ y,\ z) = (0,\ 1,\ 0) + \alpha(1,\ 2,\ 3)$. Hallar, si existe, el punto de intersección.

Un punto de la recta r es A(2, 0, -1) y su vector director es $\overrightarrow{v} = (-3,\ 2,\ 4)$. Los puntos A y P determinan el vector $\overrightarrow{u} = \overrightarrow{AP} = P - A = (3,\ 1,\ 2) - (2,\ 0,\ -1) = (1,\ 1,\ 3)$.

El plano π puede determinarse por el punto A y los vectores $\overrightarrow{u}\ y\ \overrightarrow{v}$:

$$\pi(A;\ \overrightarrow{u},\ \overrightarrow{v}) \equiv \begin{vmatrix} x-2 & y & z+1 \\ 1 & 1 & 3 \\ -3 & 2 & 4 \end{vmatrix} = 0\ ;;\ 4(x-2) + 2(z+1) - 9y + 3(z+1) - 6(x-2) - 4y = 0\ ;;$$

$$-2(x-2) - 13y + 5(z+1) = 0\ ;;\ -2x + 4 - 13y + 5z + 5 = 0\ ;;\ \underline{\pi \equiv 2x + 13y - 5z - 9 = 0}$$

Un vector normal del plano es $\overrightarrow{n} = (2,\ 13,\ -5)$ y el vector director de la recta s es $\overrightarrow{w} = (1,\ 2,\ 3)$.

Como puede observarse, los vectores $\overrightarrow{n}\ y\ \overrightarrow{w}$ son linealmente independientes, lo cual significa que

$$\underline{\underline{La\ \ recta\ \ s\ \ y\ \ el\ \ plano\ \ \pi\ \ son\ \ sec\,antes}}$$

Un punto genérico de la recta s es $Q(\alpha,\ 1+2\alpha,\ 3\alpha)$. Si el punto Q pertenece al plano π tiene que satisfacer su ecuación:

$$\left.\begin{array}{l} \pi \equiv 2x + 13y - 5z - 9 = 0 \\ Q(\alpha,\ 1+2\alpha,\ 3\alpha) \end{array}\right\} \Rightarrow 2\alpha + 13 \cdot (1+2\alpha) - 5 \cdot 3\alpha - 9 = 0\ ;;$$

$$2\alpha + 13 + 26\alpha - 15\alpha - 9 = 0\ ;;\ 13\alpha + 4 = 0\ ;;\ \underline{\alpha = -\frac{4}{13}}\ ;;\ 1 + 2\alpha = 1 - \frac{8}{13} = \frac{5}{13} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow\ \underline{\underline{Q\left(-\frac{4}{13},\ \frac{5}{13},\ -\frac{12}{13}\right)}}$$

****